

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γκατ**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - e^x \varepsilon \phi x}{3 \ln(x+1)} \left(\text{απ.} -\frac{1}{3} \right) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} \left(\text{απ.} -\frac{1}{6} \right) \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta \mu 2x}{4x^3} \left(\text{απ.} \frac{1}{3} \right)$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \eta \mu x}{2x^2} \left(\text{απ.} \frac{1}{2} \right) \quad (\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-4x+3} \left(\text{απ.} \frac{1}{8} \right) \quad (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - \ln(x+1)}{2\eta \mu x + e^{-2x} - 1} \left(\text{απ.} \frac{1}{4} \right)$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\text{απ.} 0 \right)$$

$$(\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} \left(\text{απ.} 0 \right) \quad (\theta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3) \cdot e^x \left(\text{απ.} 0 \right)$$

$$(\iota) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \left(\text{απ.} +\infty \right)$$

$$(\kappa) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) \left(\text{απ.} 1 \right)$$

$$(\lambda) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \left(\text{απ.} 0 \right)$$

$$(\mu) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \sigma \phi x \left(\text{απ.} 1 \right) \quad (\nu) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \varepsilon \phi x) \cdot \tau \varepsilon \mu 2x \left(\text{απ.} 1 \right) \quad (\xi) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \left(\text{απ.} \frac{1}{2} \right)$$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu \alpha x - 1}{x^2} = -2$ και $\alpha > 0$, να βρεθεί η τιμή του α . (απ.2)

3. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{xf'(x)} = 1$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $y = x^2 + 2$ στο σημείο $(-1,3)$ και να δείξετε ότι είναι κάθετη με την εφαπτομένη της $y = -x^2 + 2x + 1$ στο σημείο της για $x=2$.

5. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις με τύπους :

$$\alpha) y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20 \quad \beta) y = \frac{x^2}{e^x} \quad \gamma) y = \frac{x}{\ln x}$$

6. Να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+2}{2x+a}$ να είναι φθίνουσα.

7. Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής των ακόλουθων συναρτήσεων :

$$a) y = x^2 - 3x + 1 \quad \beta) y = (x-3)e^x \quad \gamma) y = (x^2 - 4)^2 \quad \delta) y = \frac{x^2 - 1}{4x + 5} \quad \varepsilon) y = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{\sigma \upsilon \nu x} \quad x \in [0, 2\pi]$$

8. Η συνάρτηση $y = \frac{ax}{\ln x} + \beta x$ έχει ακρότατο στο $(e, 2e)$. Να βρείτε τα α και β .

9. Αν το σημείο τοπικού ελάχιστου της καμπύλης $y = x^2 - 2x + 3$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y = x^3 + ax^2 + \beta$, να υπολογιστούν τα α και β .

10. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

β) Να βρείτε αριθμό $\xi \in (1, 2)$ για τον οποίο να ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}.$$

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in (-1, 1)$ για τον οποίο να ισχύει το Θεώρημα Μέσης

$$\text{Τιμής για τη συνάρτηση αυτή. (Απ. } \beta) \xi = \frac{2\sqrt{10}-2}{3}$$

11. Να βρείτε αριθμό $\xi \in (1, 2)$ για τον οποίο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ στο διάστημα } [1, 2]. \quad (\text{Απ. } \xi = 3 - \sqrt{2})$$

12. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 1}$. (Απ. 0)

13. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

14. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = x(2 + \ln x)$ με $x \in [1, e]$. Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (1, e)$ που ικανοποιεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής. (Απ. $e^{\frac{1}{e-1}}$)

15. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin x}{\eta \mu x + \sin x - 1}$. (Απ. 2)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και $0 < \alpha < \beta$. Να δικαιολογήσετε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις για το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και να δείξετε ότι: $\frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$.

ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων

$$1. y = \frac{2x^2+5}{1-x} \quad 2. y = \frac{3x^2-1}{x^2-5x+4} \quad 3. y = (x-2) \cdot e^{-x} \quad 4. y = \sqrt{\frac{x+5}{x+3}}$$

Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι πιο κάτω συναρτήσεις :

$$5. y = \frac{x^2-3}{x-2} \quad 6. y = \frac{4}{4-x^2} \quad 7. y = \frac{x^2-1}{x^2-4} \quad 8. y = \frac{x+3}{x-1}$$

Να παρασταθούν γραφικά οι πιο κάτω συναρτήσεις (Να βρεθούν και τα Σ.Κ):

$$9. y = (x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \quad 10. y = e^{\frac{1}{x^2}} \quad 11. y = x^2 \cdot \ln x \quad 12. y = \frac{1+2\ln x}{x}$$

13. Αν η συνάρτηση $y = \frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{x + \delta}$ έχει ασύμπτωτες τις $x = 1$ και $y = 2x + 3$ και ακρότατο για $x = 0$, να βρεθούν τα α, β, γ και δ .
14. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2x^2}{x+1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά. (Παγκύπριες 2016)
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά. (Παγκύπριες 2015)
17. Κατασκευάζουμε κλειστή κυλινδρική δεξαμενή από λαμαρίνα, της οποίας ο Όγκος είναι $50\frac{2}{7} \text{ cm}^3$. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την ελάχιστη δυνατή λαμαρίνα, πόση πρέπει να είναι η ακτίνα της δεξαμενής ($\pi = \frac{22}{7}$).
18. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB=2R$. Να βρείτε χορδή $\Gamma\Delta//AB$ τέτοια ώστε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ να έχει το μέγιστο εμβαδό.
19. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 20 cm και μήκος x cm. Να βρείτε για ποια τιμή του x, η διαγώνιος του παραλληλογράμμου έχει το ελάχιστο μήκος.
20. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει σκούτερ 50 κυβικών εκατοστών. Υπολογίστηκε ότι η κατασκευή σκούτερ την εβδομάδα κοστίζει $\left(\frac{x^2}{4} + 400x + 200\right) \text{ €}$, ενώ η τιμή πώλησης ενός σκούτερ είναι $\left(1000 - \frac{x}{2}\right) \text{ €}$. Να βρείτε πόσα σκούτερ πρέπει να κατασκευάζει το εργοστάσιο την εβδομάδα, ώστε το κέρδος από την πώληση τους να είναι το μέγιστο δυνατό.

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int (\alpha x + \alpha) dx$

ii) $\int x\omega^2 dx$

iii) $\int x\omega^2 d\omega$

iv) $\int x\omega^2 dt$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \int (x^2+2\eta\mu x-3) dx & \text{ii)} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3e^x + 2^x \right) dx & \text{iii)} \int \frac{x^2\sqrt{x}-x+1}{x^2} dx, x > 0 \\ \text{iv)} \int \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x} dx & \text{v)} \int \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}} dx & \text{vi)} \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}} dx. \end{array}$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \int 5e^{3x-2} dx & \text{ii)} \int \frac{5}{2-3x} dx & \text{iii)} \int \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}+5\right) dx \\ \text{iv)} \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(5x-1)} dx & \text{v)} \int (e^{2x+3} + \sigma\upsilon\nu 3x) dx & \end{array}$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \int \frac{x-2}{x^2-4x+3} dx & \text{ii)} \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{iii)} \int \epsilon\phi x dx & \text{iv)} \int \sigma\phi x dx \\ \text{v)} \int \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} dx & \text{vi)} \int \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx & \text{vii)} \int \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} dx & \text{viii)} \int \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} dx \\ \text{ix)} \int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & \text{x)} \int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx & \text{xi)} \int (3x-1)\sigma\upsilon\nu(3x^2-2x) dx & \text{xii)} \int x\eta\mu(x^2+1) dx \end{array}$$

6. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει:

$$\text{i)} f'(x) \sigma\upsilon\nu x + f(x) \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^3 x \text{ και } f(0) = 3 \quad \text{(ii)} f(x) \eta\mu x - f'(x) \sigma\upsilon\nu x = 1-2x \text{ και } f(0) = 1.$$

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 7$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη

$$\text{σχέση } f'(x) = \frac{2+f(x)}{x} \quad \text{i)} \text{ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } \int \frac{2}{x^2} dx. \quad \text{ii)} \text{ Να βρείτε τη συνάρτηση } f.$$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της. Αν $f(1)=1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = e^{x-F(x)}$, να βρεθεί η f .

9. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F''(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $F(x) = F(2-x)$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

10. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $\int [e^{f(x)} f'(x) - 2x] dx = x^{2006} + 1 \quad x \in \mathbb{R}$,

και το σημείο $O(0,0) \in C_f$.

11. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:

i) Η f είναι άρτια και η g περιττή.

$$\text{ii)} f(0)+g(0)=0 \quad \text{iii)} f(x)+g(x)=\int (x+1)e^x dx \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

12. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες $f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$.

Στη συνέχεια να βρεθεί εκείνη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=4$.

13. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f''(x)f'(x)=x^2+1$, $x \geq 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

14. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)e^{f(x)} = 3x^2 + 2$

και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο $M(2,f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = \frac{7}{6}$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Με χρήση του ορισμού, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^4 (3x+1) dx$
2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_{\sqrt{e}}^e \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} dx$$

$$\beta. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin v^2 \left(8x + \frac{\pi}{3} \right) dx$$

$$\gamma. \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$\delta. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$\epsilon. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{9 \sin^2 x - \eta \mu^2 x}$$

$$\sigma\tau. \int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$\zeta. \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad (x = \varepsilon \varphi t)$$

$$\theta. \int_2^{e+1} 4x \ln \sqrt{x-1} \cdot dx$$

$$\iota. \int_2^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} \cdot dx \quad (x = 4\eta \mu \theta)$$

$$\kappa\alpha. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^3 x - \sin^5 x) dx$$

3. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, με χρήση της αντικατάστασης $x = \pi - u$, να αποδείξετε, ότι :

$$\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx$$

β) Με τη βοήθεια του παραπάνω συμπεράσματος, να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu^3 x}{1 + \sin^2 x} \cdot dx$

4. Αν η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα

σημεία $A(5,2)$ και $B(8,1)$ και η f'' είναι συνεχής στο διάστημα $[5,8]$, να

δείξετε ότι $\int_5^8 x f''(x) dx = 1$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} dt, x > 0$

είναι σταθερή και να υπολογίσετε το $f(2)$.

6. Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (\nu \in \mathbb{N}^*)$, να αποδείξετε ότι

$$I_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\nu} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot I_{\nu-2}, \quad \forall \nu \geq 3 \quad \text{και να υπολογίσετε το } I_3.$$

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίτεδου χωρίου, που περικλείεται

από τις γραμμές

α) $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 27$

β) $y = x^3, y = 2x - x^2$

γ) $y = \sqrt{x-1}, y = \frac{x+1}{3}$

δ) $y = 3^x, y = x, y = 3, x = 0$

ε) $y = 2 - |2-x|, y = \frac{3}{|x|}$

στ) $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}, y = 0, x = 2, x = 5$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 1, x = \alpha > 1$. Τέλος να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = 2 + x^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού, που προκύπτει αν :

α) το χωρίο που περικλείεται από την f και τις ευθείες $x = 0, x = 1, y = 0$ στραφεί πλήρως γύρω από τον x -άξονα

β) το χωρίο που περικλείεται από την f και τις ευθείες $x = 0, y = 3$ στραφεί πλήρως γύρω από τον y -άξονα.

10. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού, που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον x -άξονα του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες και τη γραμμή $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$.

11. Οι καμπύλες $y = 3\eta\mu x$, $y = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ με $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ και ο x-άξονας ορίζουν το επίπεδο χωρίο A.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του A

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού, που δημιουργείται όταν το χωρίο A στραφεί πλήρως γύρω από τον x-άξονα.

12. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο f'' στο $[\alpha, \beta]$ και

$$f(\alpha) = f(\beta) \text{ να δείξετε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f''(x) dx = \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha).$$

13. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής

στο $[0, \alpha]$ με $\alpha > 0$

ι) Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(a-x) dx$

ιι) Να υπολογίσετε το $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta\mu x} \cdot dx$

14. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο f' και η γραφική της

παράσταση C_f περνά από τα σημεία A(1,1) και B(2,0), να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 [f(x) + f'(x)] e^x dx$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**ΚΥΚΛΟΣ**

- Στις πιο κάτω περιπτώσεις να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
 - $x^2 + y^2 = 25$
 - $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 - 16x + 14 = 0$
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - Έχει κέντρο το σημείο $K(-2,4)$ και ακτίνα $\sqrt{10}$.
 - Έχει διάμετρο την AB με $A(2,-5)$ και $B(-4,3)$
 - Έχει κέντρο το σημείο $K(-5,3)$ και εφάπτεται της ευθείας $(\epsilon): 3x + 4y = 7$
 - Έχει κέντρο το σημείο $K(1,4)$ και περνά από το σημείο $A(4,8)$
 - Περνά από τα σημεία $A(6,0)$, $B(0,8)$ και $\Gamma(-1,7)$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $4x - 3y = 2$ στο σημείο $A(-1,-2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(6,-1)$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στο σημείο $A(3,3)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = 2x$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των παράλληλων ευθειών $y = 3x + 1$ και $y = 3x - 4$ και το σημείο επαφής του με μια από αυτές είναι το $A(2,2)$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(3,-2)$ και η ευθεία αποκόπτει χορδή μήκους 10 μονάδων στον κύκλο.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από την αρχή των αξόνων, από το σημείο $A(8,0)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $3x - 4y = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από την αρχή των αξόνων, από το σημείο $B(4,2)$ και εφάπτεται του άξονα των x .
- Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο του $A(4,3)$.
- Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο του $A(-3,-3)$.
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 4(\lambda + 1)y + 3\lambda + 14 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να παριστάνει κύκλο.
- Δίνονται οι κύκλοι: $(K_1): x^2 + y^2 - 14x - 6y + 33 = 0$ $(K_2): x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.
 - Να δείξετε ότι οι κύκλοι είναι ίσοι.
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την κοινή χορδή τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

- 1) Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και τα σημεία της $A(t_1^2, 2t_1)$, $B(t_2^2, 2t_2)$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής που περνά από τα A και B.
- β) Αν E η εστία της παραβολής, M το μέσο της AB και P σημείο με συντεταγμένες $(-1, t_1 + t_2)$ ναδειχθεί ότι: $2(PM) = (EA) + (EB)$.
- 2) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\psi = t_1\chi + c_1$ και $\psi = t_2\chi + c_2$ είναι κάθετες αν η χορδή της παραβολής $\psi^2 = 4\chi$ που ενώνει τα σημεία $A(t_1^2, 2t_1)$ και $B(t_2^2, 2t_2)$ περνά από την εστία της.
- 3) Αν $P(at^2, 2at)$, $t > 0$ σημείο της παραβολής $\psi^2 = 4\chi$ και η εφαπτομένη και η κάθετος στο P τέμνουν τον άξονα των χ στα σημεία A και B αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\frac{(PA)}{(PB)} = t$.
- 4) Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της παραβολής $\psi^2 = 8\chi$ στο σημείο $(2, 4)$.
- 5) $P(at^2, 2at)$ είναι σημείο της παραβολής $\psi^2 = 4\chi$ και η εφαπτομένη και η κάθετος στο P τέμνουν τον άξονα των ψ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Από το P φέρουμε κάθετη ΡΓ στον άξονα Οχ (Γ το ίχνος της καθέτου).
- α) Να δείχθεί ότι για να είναι το ΡΒΑΓ παραλληλόγραμμο θα πρέπει $t=1$ ή $t=-1$.
- β) Αν $t=1$ να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ΡΒΑΓ.
- 6) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = 12\chi$.
- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της
- β) Αν η ευθεία $\psi = \kappa\chi + 1$ εφάπτεται στην καμπύλη, να βρείτε την τιμή του κ και το σημείο επαφής.
- 7) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = 12\chi$ και τα σημεία $A(3t^2, 6t)$ και $B(3\rho^2, 6\rho)$.
- α) Να δείξετε ότι η χορδή AB έχει εξίσωση: $2\chi - (t + \rho)\psi + 6t\rho = 0$
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι $t\psi = \chi + 3t^2$.
- γ) Αν η χορδή AB τέμνει τον άξονα Οψ στο σημείο $(0, -6)$ να βρείτε την εξίσωση του σχήματος πάνω στην οποία βρίσκεται ο γ.τ. του σημείου τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα A, B.
- 8) Οι εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 4x$ στα σημεία $A(t^2, 2t)$ και $B(\frac{1}{t^2}, \frac{2}{t})$ τέμνονται στο σημείο Γ. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής να δείξετε ότι η ΕΓ είναι παράλληλη προς τον άξονα Οψ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 9\psi^2 = 9$ και το σημείο A αυτής με τετμημένη 1 και τεταγμένη αρνητική .
Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο A.
2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \psi^2 = 1$, και ένα τυχαίο σημείο της $P(2\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο P είναι $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + 2\eta\mu\theta \cdot \psi =$
2.
β) Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα Oψ στο A και τον Oχ στο B να βρείτε το εμβαδόν
του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων , για $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{\psi^2}{9} = 1$ στο σημείο P(4συνθ,3ημθ) τέμνει τους άξονες
Oχ και Oψ στα σημεία A και B . Να βρεθεί ο γ.τ του μέσου M της AB.
4. Μια γέφυρα έχει το σχήμα ημιέλλειψης και στηρίζεται
σε δύο κατακόρυφες σιδερένιες δοκούς
τοποθετημένες
στις εστίες της E και E'. Αν η απόσταση μεταξύ των
δοκών είναι 12 m και το μέγιστο ύψος της γέφυρας
8 m
να βρείτε :
α) Την εξίσωση της έλλειψης. β) Την απόσταση AB.
5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \psi^2 = 1$ και P(2συνθ,ημθ) τυχαίο σημείο της . Ναδειχθεί ότι οι
συντεταγμένες των ιχνών των καθέτων που άγονται από την αρχή των αξόνων O, προς τις
εφαπτόμενες της έλλειψης στο P, όταν το P κινείται πάνω στην έλλειψη ,επαληθεύουν την
εξίσωση : $(x^2 + \psi^2)^2 = 4x^2 + \psi^2$.
6. Η εφαπτομένη και η κάθετη της έλλειψης $\frac{x^2}{18} + \frac{\psi^2}{9} = 1$ στο σημείο A($3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta$)
τέμνουν τον άξονα των ψ στα σημεία T και N αντίστοιχα .
α) Αν O είναι η αρχή των αξόνων να δείξετε ότι το γινόμενο OT.ON είναι σταθερό .
β) Αν K είναι το μέσο του TN και B σημείο πάνω στη KA έτσι ώστε KA = KB , να βρείτε την
καρτεσιανή εξίσωση του γ.τ του σημείου B.

